Série de Révision N°7

EXERCICE N°1 :

On considère la suite U définie sur IN par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$

❶ a) Montrer que : $1 \le U_n \le 2$ pour tout n IN

b) Montrer que U est décroissante.

c) Déduire que U est convergente puis déterminer sa limite.

❷ a) Montrer que $U_{n+1} - 1 \le \dfrac{2}{3}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout n IN : $U_n - 1 \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) Déterminer la limite de U.

❸ On pose $V_n = \dfrac{3-u_n}{u_n-1}$ a) Montrer que V est une suite géométrique de raison 2.

b) Déterminer U_n en fonction de n puis retrouver la limite de U.

❹ Pour tout $n \in$ IN; on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k - 1}$.Déterminer S_n en fonction de n ainsi que sa limite.

EXERCICE N°2 :

Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+1}dx,\quad n \in \mathbb{N}$

1) calculer u_0.

2) a- Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

b- En déduire alors la valeur de u_1 .

3) Montrer que $\forall\ n \in$ IN, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$, en déduire u_2 et u_3 .

4) Montrer que la suite u est décroissante.

5) a- Montrer que $\forall\ n \in$ IN : $\dfrac{1}{2(n+1)} \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$

b- déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Calculer alors, $I = \int_0^1 \dfrac{(2x-3)^2}{x+1}dx$.

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction f définie sur $[-2,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x+4} - 1$

1/ Montrer que f est continue sur $[-2,+\infty[$.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en –2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ a- Calculer f'(x) pour tout $x \in]-2,+\infty[$.

b- En déduire que f réalise une bijection sur un intervalle J, que l'on précisera.

4/ Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a- Déterminer le domaine de continuité de f^{-1} et son sens de variation.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable en -1.

c- Calculer f(0) en déduire $(f^{-1})'(1)$.

5/ Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in$ J.

EXERCICE N°4 :

Sur la figure est tracée la courbe représentative notée (ζ_f) dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur IR. On sait que :

- La droite Δ d'équation y = 2x + 4 est une asymptote à (ζ_f) en $+\infty$.
- La droite d'équation y = 0 est une asymptote à la courbe (ζ_f) en $-\infty$.
- La courbe (ζ_f) admet deux tangentes aux points d'abscisses -3 et -1.
- La courbe (ζ_f) admet une demi tangente T et une demi tangente verticale au point d'abscisse -4.

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-2x]$

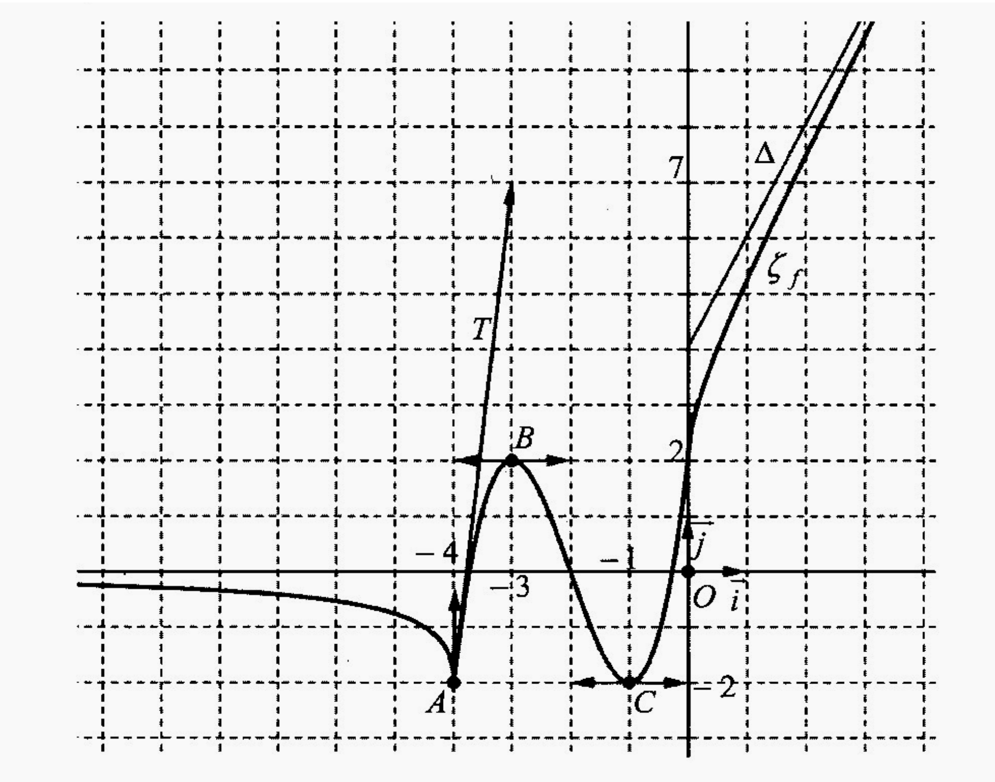
2/ Calculer : f'(-1) ; f'(-3) et $f'_d(-4)$.

3/ a- f est-elle dérivable à gauche en -4 ? Déterminer alors $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+1}$

b- Montrer qu'il existe une solution unique $\alpha\in]-4,-3[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle [-1, +∞[.

Montrer que h réalise une bijection de [-1, +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.



EXERCICE N°5 :

Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ a- Pour tout x ≠ 1, déterminer les réels a, b et c tels que : f(x) = $ax+b+\frac{c}{x-1}$

b- Montrer que la droite D : y = x – 2 est une asymptote oblique à (ζ_f).

c- Etudier les positions relatives de (ζ_f) par rapport à D puis tracer la courbe (ζ_f).

3/ a- <u>Soit g la restriction de f à]1,2]</u> .Montrer que g est une bijection de]1,2] vers J.

b- Déterminer l'intersection de la courbe (ζ_g) et de la droite Δ : y = x.

c- Montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable sur]1,+∞[puis calculer $(g^{-1})'(3/2)$

d- Construire dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (ζ_{g-1}).

4/ a- Montrer que : $x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ admet dans IR une solution unique α.

b- Montrer que g(α) = α^2.

EXERCICE N°6 :

Soit la fonction f définie sur IR par : f(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

1/ Déterminer les limites de f en en +∞ et -∞.

2/ Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout réel x, f '(x) = $\frac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$

3/ a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

4/ a- Calculer f(1), en déduire le signe de f(x) sur IR.

5/ a- Montrer que f^{-1} est dérivable sur]-3,1[et calculer $(f^{-1})'(0)$

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x ∈ J.

6/ a- Montrer que ∀ x ∈ IR, $|f'(x)| \le \sqrt{2}$

b- A l'aide des inégalités des accroissements finis montrer que : $|f(x)| \le \sqrt{2}|x-1|$